INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ZÁKLADY FINANČNÍ MATEMATIKY

Ing. Petra Hlaváčková, Ph.D.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

OBSAH

1. Úvod

1.1. Cíle

Studijní text „Základy finanční matematiky“, který máte před sebou, je studijní oporou předmětu Ekonomika podniku v prezenčním studiu bakalářského studijního programu Krajinářství B-KRAJ na Lesnické a dřevařské fakultě Mendelovy univerzity v Brně. Snahou autora bylo, aby obsah textu byl srozumitelný a zároveň stručný. Cílem předmětu je seznámit studenty s odvětvově zaměřenými tématy uvedenými v obsahu předmětu. Naučit studenty dovednosti spojené s využíváním a zpracováním informací o podnikových činnostech, kompetence k analýze a syntéze ekonomických jevů, schopnost pochopit fungování podniku jako celku a schopnosti aplikace ekonomického myšlení.

1.2. Požadované znalosti

Mezi požadované znalosti patří zejména základy ekonomie, ekonomiky a matematiky.

1.3. Doba potřebná ke studiu

Doba potřebná ke studiu této části kalkulace nákladů je cca 4 hodiny na teorii a dalších cca 8 hodin na propočítání příkladů.

1.4. Klíčová slova

Úročení, důchod, úrok, úroková míra, anuita.

1.5. Použitá terminologie (nepovinné)

Základní pojmy především z ekonomiky podniku, finanční matematiky.

2. Základy finanční matematiky

Finanční matematika není nic jiného než využití matematiky ve finanční oblasti.

Tématem bude:

1. **Úročení –** jednoduché, složené
2. **Důchody jako pravidelné platby z investic –** bezprostřední, odložený, věčný

2.1. Úročení

- Jedná se o problematiku časové hodnoty peněz.
- Důležitými pojmy jsou – úrok a úroková míra.
- **Úrok** – zapůjčí–li jeden subjekt druhému peněžní prostředky, bude požadovat odměnu jako náhradu za dočasnou ztrátu kapitálu, za riziko spojené se změnami tohoto kapitálu – tato odměna se nazývá úrok.
- Věřitel tedy získává úrok za to, že poskytl své peníze dočasně.
- Z pohledu dlužníka je úrok cena, kterou zaplatí za získání úvěru.
- Vyjádříme-li úrok v procentech z hodnoty kapitálu za časové období, dostaneme úrokovou sazbu (úrokovou míru).

  Anuita – konstantní platba pro smluvené období. Obvykle se jedná o pravidelnou splátku úvěru.
- Jedná se o platbu, která je složena ze **splátky jistiny** a **úroku**. Její výše je ve zvoleném období neměnná, plynule se mění pouze poměr mezi splátkou jistiny a úrokem.

$$A = \frac{(1+r)^n * r}{(1+r)^n - 1} * U$$

r = úrok v %
n = počet let splácení v letech
U = splácená částka v Kč

Úroková míra

- **Nominální úroková míra** – představuje sjednanou úrokovou míru mezi vypůjčovatelem a poskytovatelem kapitálu.
- **Efektivní úroková míra** – představuje uměle vypočtenou úrokovou míru, která umožňuje porovnat různé nominální úrokové míry.
- Úroková míra, která se bude používat pro diskontování, resp. akumulování peněžních toků, se nazývá **zvažovaná úroková míra**.
- Zvláštním druhem úrokové míry je **vnitřní výnosové procento**. V podstatě se jedná o takovou uvažovanou úrokovou míru, při níž se cena investice rovná současné hodnotě budoucích výnosů.

Typy úročení

- O jednoduchém úročení hovoříme tehdy, jestliže se vyplácené úroky k původnímu kapitálu nepřičítají a dále se neúročí.
- O složené úročení se jedná tehdy, jestliže se úroky připisují k peněžní částce a spolu s ní se dále úročí.

Úročení dělíme i podle toho, kdy dochází k placení úroku:

1. Úročení polhůtní neboli dekurzivní v případě, že se úroky platí na konci úrokového období.
2. Úročení předlhůtní neboli anticipativní, docházi-li k placení úroku na začátku úrokového období.

Jednoduché úročení polhútní

- U tohoto typu úročení se úročí stále pouze základní částka, vyplácené úroky se k ní nepřičítají, nevznikají tedy úroky z úroků.
- **Úrok se vypočítá podle vzorce:**

u = K * p * t/100 * 360

kde K…..je peněžní částka (kapitál)
p…...je roční úroková sazba v procentech
t……je doba splatnosti kapitálu ve dnech (obvykle $0<t<360$)
u…...úrok

u = K * i * n

kde i = p/100 je úroková sazba, vyjádřená jako desetinné číslo (značí úrok z 1 Kč za jeden rok).

n = t/360 je doba splatnosti vyjádřená v letech (obvykle $0<n<1$).

Základní rovnice:

$K_n = K_0 * (1 + i * n)$

kde K_0 počáteční kapitál
i = p/100 úroková sazba jako desetinné číslo
n = t/360 doba splatnosti kapitálu v letech
K_n = budoucí hodnota kapitálu

Složené úročení

Základní rovnice:

$\mathbf{K_n = K_0 * (1 + i)^n}$

kde K_n je budoucí hodnota kapitálu
K_0 je současná hodnota kapitálu (počáteční)
n je doba splatnosti
i je roční úroková sazba

2.1.1 Důchody jako pravidelné platby z investice

Důchodem rozumíme pravidelné platby ve stejné výši, které obvykle nazýváme **anuity** (výplaty důchodu) označované **a**.
Podle toho, kdy jsou anuity placeny, rozlišujeme důchod:
Předlhůtní - anuity jsou placeny vždy na počátku určitého časového intervalu.
Polhůtní – anuity jsou placeny vždy na konci určitého časového intervalu.

Podle toho, jak dlouho se důchod bude vyplácet, rozlišujeme důchod:

- **Dočasný** – důchod je vyplácen jen po určitou, pevně stanovenou dobu.
- **Věčný** – je vyplácen neomezeně dlouho.

Začne-li se s výplatou důchodu nyní, mluvíme o důchodu **bezprostředním**, začne-li jeho výplata až po uplynutí určité doby, mluvíme o důchodu **odloženém**.

Důchod bezprostřední polhůtní

Počáteční hodnota důchodu - základní rovnice

$$D = m * x * \left(1 + \frac{m-1}{2*m} * i\right) * \frac{1-v^n}{i}$$

kde D.... je současná hodnota důchodu
m....je počet stejných částí úrokového období
x......je výše pravidelné platby
i......je roční úroková sazba
v.....je diskontní faktor
n.....je počet úrokových období (let) – v každém z nich je vyplaceno m plateb.

Důchod odložený polhůtní

Počáteční hodnota důchodu - základní rovnice

$$K = v^k * m * x * \left(1 + \frac{m-1}{2*m} * i\right) * \frac{1-v^n}{i}$$

kde K...je současná hodnota odloženého důchodu
v...je diskontní faktor
k...je počet úrokových období, po která nejsou platby vypláceny
n...je počet úrokových období (let), v nichž jsou placeny anuity
x...je velikost anuity-pravidelné platby (za rok je jich m)
i... je roční úroková sazba
m...je počet stejně dlouhých částí roku, v nichž jsou placeny částky x

Důchod věčný polhůtní

Počáteční hodnota důchodu - základní rovnice

$$D = \frac{m * x * \left(1 + \frac{m-1}{2*m} * i\right)}{i}$$

kde D... je počáteční hodnota věčného důchodu
m...je počet stejných částí úrokového období (roku), v nichž jsou placeny anuity
x... je velikost anuity
i... je roční úroková sazba

2.1.1.1 Zadání příkladů na výpočet kalkulací

Zadání č. 1 – Jednoduché úročení polhútní

Jaký je stav vkladu 1 420 000 Kč za sedm měsíců (210 dnů) při úrokové sazbě 1,5 % p.a.?

Zadání č. 2 – Jednoduché úročení polhútní

Jaké jsou úrokové náklady úvěru ve výši 200 000 Kč, jednorázově splatného za osm měsíců (240 dnů) včetně úroku, je-li úroková sazba 9 % p.a.?

Zadání č. 3 – Počáteční (základní) kapitál

Jak velký počáteční vklad vzroste při 2 % úrokové sazbě p.a. od 12.4. do 24.6. o 1 500 Kč?

Zadání č. 4 – Složené úročení

Uložili jsme částku 120 000 Kč. Jaká bude výše kapitálu za tři roky při složeném úročení polhůtním, jestliže úrokové období je roční a úroková sazba činí 1,5 % p.a.?

Zadání č. 5 – Důchod bezprostřední polhůtní

Jaká je počáteční hodnota důchodu 4 000 Kč, který se vyplácí na konci každého čtvrtletí po dobu dvaceti let při neměnné roční úrokové sazbě 5 % ?

Zadání č. 6 – Důchod odložený polhůtní

Jak velkou částku musíme dnes při neměnné roční úrokové sazbě 5 % uložit novorozenému dítěti, aby v osmnácti letech mělo takový kapitál, který by mu zabezpečoval po dobu deseti let čtvrtletí polhůtní důchod ve výši 1 400 Kč?

Zadání č. 7 – Důchod věčný polhůtní

Jaká částka nám (a našim pozůstalým) zajistí čtvrtletní polhůtní věčný důchod ve výši 5 000 Kč při neměnném roční úrokové sazbě 4 % p.a.?

Zadání č. 8 – Výpočet anuity

Pro účel záměru si vezme podnikatelský subjekt úvěr 150 000 Kč při 8% úroku. Doba splácení bude 10 let. Hodnota investice je 150 000 Kč – jedná se o nákup štípačky.

2.2. Kontrolní otázky

1. Co si představujete pod pojmem finanční matematika?
2. Co je to úročení?
3. Jaké znáte typy úročení?
4. Jaké znáte druhy úrokové míry?
5. Co si představujete pod pojmem důchod?
6. Jaké znáte typy důchodů?

3. Závěr

3.1. Shrnutí

Finanční matematika je využívána v oblasti financí a hlavně její aplikace u všech důležitých bankovních a finančních produktů (např. běžné účty, hypoteční úvěry, stavební spoření, směnečné obchody, faktoring a forfaiting, dluhopisy, akcie, devizové obchody atd.)

4. Studijní prameny

4.1. Seznam použité literatury

Kupčák, V., 2006: Ekonomika lesního hospodářství. Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně. Brno. 258 s. ISBN 80-7157-998-X.

Synek, M. a kol.: Manažerská ekonomika. 3. aktualizované a rozšířené vydání. Grada Publishing, Praha. 2003. 472 s. ISBN 80-247-0515-X.

Synek, M. a kol.: Manažerská ekonomika. 4. aktualizované a rozšířené vydání. Grada Publishing, Praha. 2007. 464 s. ISBN 978-80-247-1992-4.

Synek, M. a kol.: Podniková ekonomika. 4. přepracované a doplněné vydání. C.H. Beck, Praha. 2006. 473 s. ISBN 80-7179-892-4.

5. **Klíč** (výsledky příkladů, odpovědi na zkušební dotazy, aj.)

Odpovědi na kontrolní otázky

1. Finanční matematika není nic jiného než **využití matematiky ve finanční oblasti**.

2. Jedná se o problematiku **časové hodnoty peněz**. Důležitými pojmy jsou – **úrok** a **úroková míra**.

3. **Jednoduché** a **složené** úročení. Úročení **polhůtní** neboli **dekurzivní** v případě, že se úroky platí na konci úrokového období. Úročení **předlhůtní** neboli **anticipativní**, docházi-li k placení úroku na začátku úrokového období.

4. **Nominální** a **efektivní** úroková míra.

5. Důchodem rozumíme **pravidelné platby** ve stejné výši, které obvykle nazýváme **anuity** (výplaty důchodu) označované **a**.

6. Podle toho, kdy jsou anuity placeny, rozlišujeme důchod:

Předlhůtní - anuity jsou placeny vždy na počátku určitého časového intervalu.
Polhůtní – anuity jsou placeny vždy na konci určitého časového intervalu.

Podle toho, jak dlouho se důchod bude vyplácet, rozlišujeme důchod:
Dočasný – důchod je vyplácen jen po určitou, pevně stanovenou dobu.
Věčný – je vyplácen neomezeně dlouho.
Začne-li se s výplatou důchodu nyní, mluvíme o důchodu **bezprostředním**, začne-li jeho výplata až po uplynutí určité doby, mluvíme o důchodu **odloženém**.

Výsledky řešení příkladů

Zadání č. 1

Řešení:
K_0 = 1 420 000, i = 0,015, n = 210/360 = 7/12.
K_n = K_0 * (1 + i * n) = 1 420 000 * (1 + 0,015 * 7/12) = **1 432 425**.

Původní vklad vzroste na **1 432 425 Kč**.

Zadání č. 2

Řešení:
K = 200 000
p = 9
i = 9/100 = 0,09
t = 240
n = 8 * 30/360 = 8/12 = 2/3

1. u = K * p * t/100 * 360 = 200 000 * 9 * 240/36 000 = 12 000
2. u = K * i * n = 200 000 * 0,09 * 2/3 = 12 000

Úrokové náklady činí **12 000 Kč**.

Zadání č. 3

Řešení:
$i = p/100 = 0{,}02$
$u = 1\,500$
$n = t/360 = 72/360$
$K_0 = u / i * n = 1\,500 / 0{,}02 * 72 /360 =$ **375 000**.

Původní výše vkladu byla **375 000 Kč**.

Zadání č. 4

Řešení:
$K_0 = 120\,000$, $i = 0{,}015$, $n = 3$
$K_n = K_0 * (1 + i)^n = 120\,000 * (1{,}015)^3 =$ **125 481, 405**.

Stav kapitálu po třech letech bude **125 481, 405 Kč**.

Zadání č. 5

Řešení: x = 4 000, m = 4, n = 20, i = 0,05

$$D = m * x * \left(1 + \frac{m-1}{2*m} * i\right) * \frac{1 - v^n}{i}$$

$$D = 4 * 4000 * \left(1 + \frac{3}{8} * 0{,}05\right) * \frac{1 - \frac{1}{1{,}05^{20}}}{0{,}05}$$

Počáteční hodnota důchodu, tedy cena investice, je **203 134,03 Kč**.

Zadání č. 6

Řešení: k = 18, m = 4, n = 10, i = 0,05, x = 1 400

$$K = v^k * m * x * \left(1 + \frac{m-1}{2*m} * i\right) * \frac{1 - v^n}{i}$$

$$K = 1{,}05^{-18} * 4 * 1400 * \left(1 + \frac{3}{8} * 0{,}05\right) * \frac{1 - 1{,}05^{-10}}{0{,}05}$$

K zabezpečení čtvrtletních výplat důchodu ve výši 1 400 Kč, které začnou za osmnáct let a budou trvat po dobu deseti let, musíme dnes uložit **18 304, 72 Kč**.

Zadání č. 7

Řešení:
X = 5 000, m = 4, i = 0,04.

$$D = \frac{m * x * \left(1 + \frac{m-1}{2 * m} * i\right)}{i}$$

$$D = \frac{4 * 5000 * \left(1 + \frac{3}{8} * 0{,}04\right)}{0{,}04}$$

K tomu, aby bylo možno věčně získávat každé čtvrtletí částku 5 000 Kč, musíme při dané úrokové sazbě (míře výnosu) uložit (investovat) částku **507 500 Kč**.

Zadání č. 8

rok	anuita	úrok	spl. jistina	zůstatek
2012	22 354	12 000	10 354	139 646
2013	22 354	11 171,68	11 182,32	128 463,68
2014	22 354	10 277,094	12 076,906	116 386,78
2015	22 354	9 310,9424	13 043,058	103 343,73
2016	22 354	8 267,4984	14 086,502	89 257,23
2017	22 354	7 140,5784	15 213,422	74 043,808
2018	22 354	5 923,5046	16 430,496	57 613,312
2019	22 354	4 609,0649	17 744,936	39 868,376
2020	22 354	3 189,47	19 164,53	20 703,846
2021	22 354	1 656,3076	20 697,693	0

$$A = \frac{(1+r)^n * r}{(1+r)^n - 1} * U = \frac{0{,}1727}{1{,}1589} * 150000 = 22354 Kč$$